

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0400104

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions :

1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Determine the set

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5}{4x + 1} < 1 \right\}$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5}{4x + 1} < 1 \right\} \quad \text{সংহতিটো নিৰূপণ}$$

কৰা।

- (b) Write the trichotomy property of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিকোট'মি ধৰ্মটো লিখা।

- (c) If $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\}$, find $\sup A$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\} \quad \text{হ'লে } \sup A$$

নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Write the first five terms of the sequence

$$\{x_n\}, \text{ where } x_n = \frac{1}{n^2 + 2}.$$

$\{x_n\}$ অনুক্রমটোৰ প্ৰথম পাঁচটা বাৰ্শি লিখা, য'ত

$$x_n = \frac{1}{n^2 + 2}$$

(e) Find $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) What is a monotone sequence? Give one example.

একদৃষ্ট অণুক্রম বুলিলে কি বুজা? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(g) State Cauchy's criterion for convergence of a series $\sum x_n$.

$\sum_n x_n$ শ্ৰেণীৰ n অভিসাৰিতাৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়ক বা

নিয়মটো লিখা।

(h) Give an example of a series in $\mathbb{R}$ which is convergent, but not absolutely convergent.

বাস্তৱ সংখ্যাত এনেকুৱা এটা শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ দিয়া, যিটো অভিসাৰী, কিন্তু পৰম অভিসাৰী নহয়।

2. Answer any six of the following questions :

2×6=12

তলৰ প্রশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \leq a < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$, then show that $a = 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ এনেকুৱা যে সকলো $\varepsilon > 0$ -ৰ বাবে $0 \leq a < \varepsilon$ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $a = 0$ হ'ব।

(b) State the completeness property of $\mathbb{R}$. Mention one example to demonstrate this property.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ completeness property টো লিখা। এই ধৰ্মটো সিদ্ধ হোৱা দেখুৱাবলৈ এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Show that for all $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$.

দেখুওৱা যে সকলো $a \in \mathbb{R}$ -ৰ বাবে $|a|^2 = a^2$.

(d) Let A and B be non-empty subsets of $\mathbb{R}$ such that $a \leq b$ for all $a \in A$, $b \in B$. Show that $\sup A \leq \inf B$.

যদি A আৰু B বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা এনেকুৱা অৱিক্ত সংহতি যাতে $a \leq b$ হয়, সকলো $a \in A$, $b \in B$ -ৰ বাবে, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sup A \leq \inf B$.

(e) Show that the sequence $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ does not converge to any $x \in \mathbb{R}$.

দেখুওৱা যে $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ এই অণুক্ৰমটো কোনো $x \in \mathbb{R}$ -লৈ অভিসাৰী নহয়।

(f) Determine the limit of the sequence $\{x_n\}$, where $x_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$.

$\{x_n\}$ অণুক্ৰমটোৰ চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$x_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$$

(g) Examine the convergence or divergence of the sequence $\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ এই অণুক্ৰমটো অভিসাৰী নে
অপসাৰী পৰীক্ষা কৰা।

(h) If a series $\sum_n x_n$ is convergent, then show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

যদি $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

হ'ব।

(i) Show that the series $\sum_n \sin \frac{1}{n}$ is divergent.

দেখুওৱা যে $\sum_n \sin \frac{1}{n}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী।

- (j) Use comparison test to show that the series

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + a_n}$$

where $\{a_n\}$ is a sequence of strictly positive real numbers, is convergent.

তুলনামূলক পরীক্ষার সহায়ত দেখুওৱা যে

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + a_n}$$

য'ত $\{a_n\}$ এটা তীক্ষ্ণভাৱে ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ অণুক্ৰম, এই শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হ'ব।

3. Answer any *four* of the following questions :

5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) State and prove the triangle inequality in $\mathbb{R}$.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিভুজ অসমতাটো উল্লেখ কৰি তাৰ প্ৰমাণ দিয়া।

- (b) Solve the following inequality :

তলৰ অসমতাটো সমাধান কৰা :

$$|x| + |x+1| < 2$$

- (c) Let A and B be bounded non-empty subsets of $\mathbb{R}$. Prove that

ধৰা হ'ল, A আৰু B বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা পৰিবিদ্ধ অধিক সংহতি। প্ৰমাণ কৰা যে

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

(d) If $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, then show that $\inf S = 0$.

যদি $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\inf S = 0$ হ'ব।

(e) Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be real sequences converging to x and y respectively. Show that $\{x_n + y_n\}$ converges to $x + y$.

যদি $\{x_n\}$ আৰু $\{y_n\}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ অণুক্ৰম দুটা যথাক্ৰমে x আৰু y -লৈ অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\{x_n + y_n\}$ অণুক্ৰমটো $x + y$ -লৈ অভিসাৰী হ'ব।

(f) Show that a convergent sequence of real numbers is bounded.

দেখুওৱা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অণুক্ৰম এটা পৰিবদ্ধ হয়।

(g) Prove that the p -series $\sum_n \frac{1}{n^p}$ converges for $p > 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\sum_n \frac{1}{n^p}$ এই p -শ্ৰেণীটো $p > 1$ -ৰ বাবে অভিসাৰী হয়।

- (h) Let $\{x_n\}$ be a sequence of non-zero real numbers. If there exists $r \in \mathbb{R}$ with $0 < r < 1$ and $k \in \mathbb{N}$ such that

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq r \text{ for } n \geq k$$

then prove that the series $\sum_n x_n$ is absolutely convergent.

ধৰা হ'ল $\{x_n\}$ অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা অণুক্ৰম। যদি $r \in \mathbb{R}$ এনেকুৱা যাতে $0 < r < 1$ আৰু $k \in \mathbb{N}$ -ৰ বাবে

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq r \text{ সকলো } n \geq k\text{-ৰ বাবে}$$

তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী হ'ব।

4. Answer any *two* of the following questions :

10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) State and prove monotone subsequence theorem of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ একদিষ্ট উপাণুক্ৰম উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

- (b) Prove Cauchy's criterion for convergence of real sequence.

বাস্তৱ অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়ক বা নিয়মটো প্ৰমাণ কৰা।

- (c) Show that every contractive sequence is convergent.

দেখুওৱা যে প্রতিটো সংকুচিত অণুক্ৰম অভিসাৰী হয়।

- (d) Prove that if a series $\sum_n x_n$ is absolutely convergent, then any rearrangement $\sum_k y_k$ of $\sum_n x_n$ is also convergent to the same value.

যদি $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে শ্ৰেণীটোৰ পদসমূহ সালসলনি কৰি গঠন কৰা যি কোনো এটা শ্ৰেণী $\sum_k y_k$ ও একেটা মানলৈকে অভিসাৰী হ'ব।

- (e) If the series $\sum_n x_n$ and $\sum_n y_n$ are convergent, then show that $\sum_n (x_n + y_n)$ is also convergent. Does the similar result hold in case of $\sum_n x_n y_n$? Justify your answer.

যদি $\sum_n x_n$ আৰু $\sum_n y_n$ এই শ্ৰেণী দুটা অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sum_n (x_n + y_n)$ শ্ৰেণীটোও অভিসাৰী হ'ব। $\sum_n x_n y_n$ শ্ৰেণীটোৰ বাবেও এই একেটা কথাই প্ৰযোজ্য হ'বনে? তোমাৰ উত্তৰৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰা।
