

Total number of printed pages-12

1 (Sem-4) MAT 3

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0400304

(Analytical Geometry)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the form of the equation $3x + 4y = 5$ when the origin is shifted to the point $(3, -2)$.

মূলবিন্দু $(3, -2)$ লৈ স্থানান্তৰ কৰিলে $3x + 4y = 5$ সমীকৰণৰ ৰূপ কি হ'ব উলিওৱা।

- (b) Under what condition the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents a pair of perpendicular straight lines ?

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে দুডাল পৰস্পৰ লম্ব ৰেখা প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব?

- (c) Write true or false (শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা) :

The degree of an equation is an invariant under orthogonal transformation.

লান্থিক ৰূপান্তৰ সাপেক্ষে এটা সমীকৰণৰ মাত্ৰা অপৰিবৰ্তনীয়।

- (d) Find the nature of the conic represented by polar equation $\frac{1}{r} = 8 + 5 \cos \theta$.

ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ $\frac{1}{r} = 8 + 5 \cos \theta$ ই নিৰ্দেশ কৰা শাংকৰটো কি হয় উলিওৱা।

- (e) The axes are rotated through an angle of 60° without change of origin. The co-ordinates of a point are $(4, \sqrt{3})$ in the new system. Find the co-ordinates in the old system.

মূলবিন্দু পৰিৱৰ্তন নকৰাকৈ অক্ষদ্বয়ক 60° কোণত ঘূৰোৱা হ'ল। নতুন অক্ষ সাপেক্ষে এটা বিন্দুৰ স্থানাংক $(4, \sqrt{3})$ ।

পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে বিন্দুটোৰ স্থানাংক উলিওৱা।

- (f) Write down the equations of the asymptotes of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ লিখা।

- (g) Find the norm of the vector $\vec{v} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{v} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰৰ নৰ্ম (norm) উলিওৱা।

- (h) Find the volume of the parallelopiped whose adjacent edges are

$$\vec{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{v} = \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k},$$

$$\vec{w} = 3\hat{j} + 2\hat{k}.$$

$$\vec{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{v} = \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k},$$

$$\vec{w} = 3\hat{j} + 2\hat{k} \text{ সংলগ্ন বাহুবিশিষ্ট}$$

parallelopiped টোৰ ঘনমান উলিওৱা।

2. Answer the following questions: $2 \times 6 = 12$
তলৰ দিয়াবোৰৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Reduce the equation $2x + 3y - 6 = 0$ in the form $lx + my = 0$ by choice of new origin on the x -axis.

x -অক্ষত নতুন মূলবিন্দু স্থিৰ কৰি $2x + 3y - 6 = 0$ সমীকৰণটো $lx + my = 0$ আকাৰলৈ লঘুকৃত কৰা।

- (b) For what value of k does the equation $xy + 5x + ky + 15 = 0$ may represent a pair of straight lines.

- k ৰ কি মানৰ বাবে $xy + 5x + ky + 15 = 0$ সমীকৰণটোই দুডাল ৰেখাখণ্ড নিৰ্দেশ কৰিব?
- (c) Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 5$ conjugate to $y + 3x = 0$.
 $3x^2 + 4y^2 = 5$ উপবৃত্তটোৰ $y + 3x = 0$ ব্যাসৰ সংযোজক (conjugate) ব্যাসডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা।
- (d) Find the equation of the cone whose vertex is the origin and which passes through the curve of intersection of the plane $lx + my + nz = p$ and the surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.
মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট আৰু $lx + my + nz = p$ সমতল আৰু $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ পৃষ্ঠৰ বক্ৰীয় ছেদাংশৰ মাজেৰে যোৱা শংকুটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।
- (e) A force $\vec{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ lb is applied to a point that moves on a line from $P(-1, 1, 2)$ to $Q(3, 0, -2)$. If the distance is measured in feet, how much work is done?
 $\vec{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ lb বল প্ৰয়োগ কৰি এটা বিন্দু $P(-1, 1, 2)$ ৰ পৰা $Q(3, 0, -2)$ লৈ স্থানান্তৰ কৰা হ'ল। দূৰত্বৰ মাপ ফুটত (feet) হ'লে কিমান কাৰ্য্য সম্পাদন কৰা হ'ল উলিওৱা।

- (f) Find the centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$.
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰবিন্দু আৰু ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

3. Answer **any four** parts : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Prove that $a + b$ and $ab - h^2$ obtained from $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ remain invariant under transformation of rotation.

প্ৰমাণ কৰা যে,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ ৰ পৰা প্ৰাপ্ত $a + b$ আৰু $ab - h^2$ ৰাশি দুটা ঘূৰ্ণীয় ৰূপান্তৰ সাপেক্ষে অপৰিবৰ্ত্তনীয় হৈ থাকে।

- (b) Prove that the straight lines represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ will be equidistant from origin if

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2).$$

প্ৰমাণ কৰা যে,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে প্ৰতিনিধিত্ব কৰা ৰেখা দুডাল মূলবিন্দুৰ পৰা সমদূৰত্বত থাকিব যদিহে

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2).$$

- (c) If PSP' and QSQ' are two perpendicular focal chords of a conic, prove that

$$\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} = \text{a constant.}$$

PSP' আৰু QSQ' এটা শাংকৰৰ দুডাল পৰস্পৰ লম্ব

নাভীয় জ্যা হ'লে প্রমাণ কৰা যে, $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} = \text{ধ্রুবক}$

- (d) Show that the line $lx + my = n$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$ if $ln = am^2$.

দেখুওৱা যে, $lx + my = n$ ৰেখাডাল $y^2 = 4ax$ অভিবৃত্তৰ স্পৰ্শক হব যদিহে $ln = am^2$.

- (e) Find the coordinates of the centre and radius of the circle — 3+2=5

$$x + 2y + 2z = 15,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0.$$

$$x + 2y + 2z = 15,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0$$

বৃত্তৰ কেন্দ্ৰবিন্দুৰ স্থানাংক আৰু ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

- (f) Find the equation of the right circular cylinder of radius 5 whose axis passes through $(1, 2, 3)$ and is parallel to

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এটা সোঁ বৃত্তাকাৰ চিলিণ্ডাৰৰ সমীকৰণ উলিওৱা যাৰ অক্ষ $(1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2} \text{ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হয়।}$$

- (g) Find the orthogonal projection of

$$\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \text{ on } \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

Also find the vector component of $\vec{v}$

orthogonal to $\vec{b}$. 3+2=5

$$\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \text{ ভেক্টৰৰ } \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} \text{ ৰ ওপৰত}$$

লম্বীয় প্ৰক্ষেপ উলিওৱা। লগতে $\vec{b}$ ৰ লম্ব হোৱা $\vec{v}$ ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ উপাংশ উলিওৱা।

- (h) Show that the lines

$$L_1 : x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$$

$$L_2 : x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$$

intersect and find the point of intersection. 3+2=5

দেখুওৱা যে

$$L_1 : x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$$

$$L_2 : x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$$

ৰেখা দুডালে পৰস্পৰক ছেদ কৰে আৰু ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।

4. Answer **any two** parts : 10×2=20

যিকোনো দুই অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Find the equations of the following when $ax + by + c = 0$ and $bx - ay + d = 0$ are considered as axes of x and y respectively

I. $(bx - ay + d)^2 = a^2 + b^2$

II. $(ax + by + c).(bx - ay + d) = a^2 + b^2$

5

$ax + by + c = 0$ আৰু $bx - ay + d = 0$ ৰেখা দুডালক ক্ৰমে x অক্ষ আৰু y অক্ষ হিচাপে লৈ তলৰ সমীকৰণ কেইটা কি হ'ব উলিওৱা —

I. $(bx - ay + d)^2 = a^2 + b^2$

II. $(ax + by + c).(bx - ay + d) = a^2 + b^2$

(ii) Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$. 5

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(b) (i) Prove that the tangents at the ends of a pair of conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ form a parallelogram of constant area. 5

প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ এযোৰ সংযোজক ব্যাসৰ (conjugate diameters) প্ৰান্তবিন্দুত টনা স্পৰ্শকবোৰে এটা সামান্তৰিক সৃষ্টি কৰে যাৰ আয়তন এটা ধ্ৰনক হয়।

(ii) The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the co-ordinate axes in A, B, C. Prove that the equation to the cone generated by lines drawn from O to meet circle ABC is

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)yz + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)zx + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)xy = 0.$$

5

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ সমতলে অক্ষত্ৰয়ক A, B, C বিন্দুত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে, মূল বিন্দু O ৰ পৰা ABC বৃত্তলৈ অংকণ কৰা ৰেখা সমূহে উৎপন্ন কৰা শংকুৰ সমীকৰণ

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)yz + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)zx + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)xy = 0$$

- (c) State the type of the conic and reduce it to canonical form :

$$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0.$$

$$2+8=10$$

তলৰ শাংকৰটোৰ প্ৰকাৰ উল্লেখ কৰা আৰু ইয়াক canonical ৰূপলৈ সৰলীকৃত কৰা :

$$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$$

- (d) (i) A plane passes through a fixed point (p, q, r) and cuts the axes in A, B, C . Show that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2. \quad 4$$

এখন সমতল এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (p, q, r) ৰ মাজেৰে যায় আৰু অক্ষক A, B, C বিন্দুত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সম্ভাৰপথ হ'ল

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$$

- (ii) Find the cylindrical co-ordinates of a point whose cartesian co-ordinates are $(1, \sqrt{3}, 2)$. 2

এটা বিন্দুৰ কাৰ্টেজীয় স্থানাংক $(1, \sqrt{3}, 2)$ হ'লে বিন্দুটোৰ নলীয় স্থানাংক উলিওৱা।

- (iii) Find the distance between the points whose spherical co-ordinates are

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ and } \left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right). \quad 4$$

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ আৰু } \left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

গোলকীয় স্থানাংক বিশিষ্ট বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা।

- (e) (i) Find the angle between a diagonal of a cube and one of its edge. 3

এটা ঘনকৰ এডাল কৰ্ণ আৰু এটা দাঁতি (edge)ৰ মাজৰ কোণটো উলিওৱা।

$$(ii) \text{ Let } \vec{v} = \langle 2, 3 \rangle, \hat{e}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\text{and } \hat{e}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Find the scalar components and vector components of $\vec{v}$ along $\hat{e}_1$

and $\hat{e}_2$. 4

ধৰা হ'ল $\vec{v} = \langle 2, 3 \rangle$, $\hat{e}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

আৰু $\hat{e}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

$\vec{v}$ ভেক্টৰ $\hat{e}_1$ আৰু $\hat{e}_2$ ব দিশত ভেক্টৰ উপাংশ

আৰু স্কেলাৰ উপাংশ উলিওৱা।

- (ii) Find the vector equation of a line in 3-space that passes through the points $P_1 (2, 4, -1)$ and $P_2 (5, 0, 7)$.
3

$P_1 (2, 4, -1)$ আৰু $P_2 (5, 0, 7)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডালৰ 3-space ত ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।