

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT-MJ-02-B-01-04

MAT-MN-02-B-01-04

Calculus

Full Marks : 60

Time : 2½ hrs

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer *either* in English *or* in Assamese.

1. Answer the following questions:

1×8=8

নিম্নলিখিত প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

a) Write the values of $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a}$ and $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a}$

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a}$ আৰু $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a}$ মান লিখা।

b) Is the function $f(x)$ continuous at $x=3$?

$f(x)$ ফলনটো $x=3$ বিন্দুত অৱিচ্ছিন্ন হয়নে ?

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

c) Write the Maclaurin series for $\sin x$

$\sin x$ ৰ মেৰুৰিণ শ্ৰেণীটো লিখা।

d) Write the n^{th} derivative of $\cos(ax+b)$

$\cos(ax+b)$ ৰ n তম অৱকলজ লিখা।

e) The remainder term in Taylor's formula is -

টেইলৰ সূত্ৰৰ বাকী পদটো হ'ল -

i) $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

ii) $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$

iii) $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$

iv) $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{k!}{(x-x_0)^k}$

(Choose the correct option)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

f) Evaluate (মান উলিওৱা) : $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

g) On the interval $[a, b]$ $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ satisfies the hypothesis of Rolle's Theorem. Then values of a and b are -

$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ ফলনটোৱে $[a, b]$ অন্তৰালত বোলৰ উপপাদ্যৰ চৰ্তসমূহ সিদ্ধ কৰে। তেন্তে a আৰু b মান হ'ব -

i) $a = 0, b = -1$ ii) $a = -2, b = -2$

iii) $a = -2, b = 1$ iv) $a = 0, b = -2$

h) State Euler's Theorem on homogeneous functions.
সমমাত্ৰিক ফলনৰ বাবে ইউলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2. Answer **any six** of the following questions: $2 \times 6 = 12$
 নিম্নলিখিত প্রশ্নসমূহৰ যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

a) Evaluate (মান উলিওৱা) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

- b) For what values of x is there a discontinuity in the graph of $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$?

x ৰ কোনবোৰ মানৰ বাবে $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ ফলনৰ লেখটো বিচ্ছিন্ন হ'ব ?

c) Evaluate (মান উলিওৱা) $\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{3/2} dx$

d) Find the n^{th} derivative of $y = \frac{1}{x+a}$

$y = \frac{1}{x+a}$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

- e) Find the first three Taylor polynomials of $\ln x$ about $x = 2$.

$x = 2$ সাপেক্ষে $\ln x$ ৰ বাবে প্ৰথম তিনিটা টেইলৰ বহুপদ উলিওৱা।

- f) Verify Euler's Theorem for the function

$$z = (x^2 + xy + y^2)^{-1}$$

$z = (x^2 + xy + y^2)^{-1}$ ফলনৰ বাবে ইউলাৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

- g) Let $f(x, y) = y^2 e^x + y$. Find f_{xyy}

$f(x, y) = y^2 e^x + y$ হ'লে f_{xyy} উলিওৱা।

h) For the function $f(x) = x^2 - 2x$, verify if Rolle's Theorem is applicable on the interval $[0, 2]$

$f(x) = x^2 - 2x$ ফলনটোৱে $[0, 2]$ অন্তৰালত ৰোলৰ উপপাদ্য সিদ্ধ কৰেনে পৰীক্ষা কৰা ?

i) Suppose f is a continuous function such that

$$f(2) = 1 \text{ and } \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 4g(x)] = 13. \text{ Find } \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

ধৰা হ'ল f এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন য'ত $f(2) = 1$ আৰু

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 4g(x)] = 13. \text{ } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ ৰ মান উলিওৱা।}$$

j) Let $f(x, y) = x^2y + 5y^3$. Find the slope of the surface $z = f(x, y)$ in the x -direction at the point $(1, -2)$.

ধৰা হ'ল $f(x, y) = x^2y + 5y^3$ । $(1, -2)$. $z = f(x, y)$ পৃষ্ঠখনৰ x ৰ দিশত $(1, -2)$ বিন্দুত প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer **any four** of the following questions : $5 \times 4 = 20$

a) Draw the graph of $f(x) = \frac{1}{x}$ and explain $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$3 + 2 = 5$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ৰ লেখ আঁকা আৰু ইয়াৰপৰা $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ৰ ব্যাক্যা কৰা।

b) Write the $\varepsilon - \delta$ definition of the limit of a function $f(x)$ at a point $x = a$. Use this definition to prove

$$\text{that } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$$

$$1 + 4 = 5$$

এটা ফলনৰ চৰম মানৰ বাবে $\varepsilon - \delta$ সূত্ৰটো লিখা। এই সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি

$$\text{প্ৰমাণ কৰা যে } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$$

- c) State Leibnitz's theorem for the n^{th} derivative of the product of two functions $f(x)$ and $g(x)$. Apply the theorem to find the n^{th} derivative of $y = x^3 e^x$.

$$1+4=5$$

$f(x)$ আৰু $g(x)$ ফলন দুটাৰ পূৰণ ফলৰ n তম অৱকলজ উলিওৱাৰ বাবে লিবনিট্জৰ সূত্ৰটো লিখা। এই সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি $y = x^3 e^x$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

- d) Obtain the reduction formula for $\int \tan^n x \, dx$. Hence evaluate $\int \tan^6 x \, dx$

$$3+2=5$$

$\int \tan^n x \, dx$ ৰ ৰিডাকচন সূত্ৰটো উলিওৱা। ইয়াৰপৰা $\int \tan^6 x \, dx$ উলিওৱা।

- e) Using Lagrange's mean value theorem show that

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \quad x > 0$$

$$4+1=5$$

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \quad x > 0.$$

Hence show that (ইয়াৰপৰা দেখুওৱা যে)

$$0 < [\log(1+x)]^{-1} - x^{-1} < 1 \quad \forall x > 0$$

- f) Find the n^{th} Maclaurin polynomial for $\frac{1}{1-x}$ and

express it in Sigma notation.

$$4+1=5$$

$\frac{1}{1-x}$ ৰ বাবে মেক্লেৰিণৰ n তম বহুপদ উলিওৱা আৰু ইয়াক ছিগমা

(Sigma) চিহ্নৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

g) i) Describe the domain of $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ 2

ii) Sketch the level curve $z = k$, for $z = x^2 + 9y^2$,
 $k = 0, 1, 2, 3$ 3

$k = 0, 1, 2, 3$ ৰ বাবে $z = x^2 + 9y^2$, ৰ $z = k$ স্তৰ বক্ৰ অংকন
 কৰা।

h) If (যদি) $\sin v = \frac{x + 2y + 3z}{\sqrt{x^8 + y^8 + z^8}}$ show that (দেখুওৱা যে)

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} + 3 \tan v = 0$$

4. Answer **any two** of the following questions: 10×2=20

a) i) Using Squeezing theorem find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Hence find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ 4+2=6

স্কুইজিং উপপাদ্যৰ সহায়ত $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ৰ মান উলিওৱা। ইয়াৰ পৰা

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ উলিওৱা।

ii) Find the values of the constants k and m , if possible, that will make the function f continuous everywhere 4

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 2 \\ mx + k, & 2 < x < 10 \\ 21 & x \geq 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 2 \\ mx + k, & 2 < x < 10 \\ 21 & x \geq 10 \end{cases} \text{ ফলনটো সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হ'লে}$$

k আৰু m ৰ মান উলিওৱা।

b) i) Obtain the reduction formula for $\int \sin^n x \, dx$.

Hence find $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ 3+3=6

$\int \sin^n x \, dx$ ৰ ৰিডাকচন সূত্ৰটো উলিওৱা। ইয়াৰদ্বাৰা

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ মান উলিওৱা।

ii) Evaluate (মান উলিওৱা)

4

$$\int_0^{2a} x^3 (2ax - x^2)^{3/2} \, dx$$

c) i) State and prove Mean value theorem 2+4=6

মধ্যমান উপপাদ্যৰ উক্তি লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

ii) Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$ there exists atleast one root of $e^x \sin x - 1 = 0$ 4

দেখুওৱা যে $e^x \cos x = 1$ ৰ যিকোনো দুটা মূলৰ মাজত

$e^x \sin x - 1 = 0$ ৰ অতি কমেও এটা মূল থাকে।

d) i) If $y = e^{m \cos^{-1} x}$, show that

4+3=7

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0$$

Hence find $y_n(0)$

$y = e^{m \cos^{-1} x}$ হ'লে দেখুওৱা যে

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0$$

ইয়াৰ পৰা $y_n(0)$ উলিওৱা

ii) If (যদি) $I_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n \log x)$

3

prove that (প্রমাণ কৰা যে) $I_n = nI_{n-1} + (n-1)!$

e) If (যদি) $z = x^m f(y/x) + x^n g(x/y)$, prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + mnz =$$

10

$$(m+n-1) \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$
