

Total number of printed pages-11

1 (Sem-2) MAT

2024

MATHEMATICS

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, find the value of

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}.$$

যদি $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$ অৰ মান

উলিওৱা।

Contd.

- (b) State whether the statement is true **or** false, "The absolute value of a continuous function is continuous."

“অবিচ্ছিন্ন ফলন এটাৰ পৰম মানৰ ফলনটোত অবিচ্ছিন্ন।”
উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা।

- (c) Write the Maclaurin's series for e^x .

e^x -অৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

- (d) Can the intermediate value theorem be used to determine the number of roots within an interval?

এটা অন্তৰালত থকা মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিবলৈ
Intermediate value theorem ব্যৱহাৰ কৰিব
পাৰি নে?

- (e) What is the n th derivative of x^n ?

x^n -অৰ n -তম অৱকলজটো কি?

- (f) Write the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$ -ৰ মান লিখা।

- (g) Write the domain of the function

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ ফলনটোৰ
আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

- (h) What is the slope of the surface $z = xy^2$ in the x -direction at the point $(2, 3)$?

$z = xy^2$ পৃষ্ঠৰ $(2, 3)$ বিন্দুত x -অৰ দিশত প্ৰৱণতা
কিমান?

2. Answer **any six** questions : 2×6=12

যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find (মান উলিওৱা) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 - 5}$

- (b) If the function $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$

is continuous everywhere, then find the value of k .

যদি $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$ ফলনটো সদায়েই

অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে k -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) State the squeezing theorem for the functions f , g and h .

f , g আৰু h ফলনৰ বাবে স্কুইজিং উপপাদ্যটো লিখা।

- (d) If (যদি) $y = e^{a \sin^{-1} x}$, prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$(1 - x^2)^2 y_2 - xy_1 - ay^2 = 0$$

- (e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

- (f) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 + 1$ in the interval $[-1, 1]$.

$f(x) = x^2 + 1$ ফলনৰ $[-1, 1]$ অন্তৰালত ব'লৰ উপপাদ্যৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

- (g) If $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, find $\frac{\partial w}{\partial x}$ and $\frac{\partial w}{\partial y}$ at point $(2, 1, -1)$.

যদি $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, $(2, 1, -1)$ বিন্দুত

$\frac{\partial w}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial w}{\partial y}$ অৰ মান উলিওৱা।

- (h) Define homogeneous function. State Euler's theorem on homogeneous function.

$$1+1=2$$

সুষম ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। সুষম ফলনৰ বাবে ইউলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

- (i) If $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$, find $\frac{d^3 f}{dx^3}$ when $x = 0$.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$ ফলনৰ $x = 0$ বিন্দুত

$\frac{d^3 f}{dx^3}$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x), x > 0$$

3. Answer **any four** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} \quad 2$$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \frac{1}{2}$$

3

(b) If $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

show that f is not derivable at $x=0$.

যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

দেখুওৱা যে $x=0$ বিন্দুত f ফলনটো অৱকলনীয় নহয়।

(c) State and prove Leibnitz theorem.

$$1+4=5$$

লীবনিটজৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$, show that

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}.$$

যদি $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$ হয়, দেখুওৱা যে

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}.$$

(e) Expand $\log(1+x)$ by Maclaurin's theorem.

মেক্‌ল'ৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\log(1+x)$ ক বিস্তাৰিত কৰা।

(f) Write Taylor's polynomial for a function f . Find the n th Taylor's polynomial for $\frac{1}{x}$ and express it in sigma notation.

$$2+2+1=5$$

ফলন f -ৰ বাবে টয়লৰছৰ বহুপদ বাশিটো লিখা। $\frac{1}{x}$

অৰ বাবে টয়লৰছৰ n তম বহুপদ বাশিটো লিখা আৰু ইয়াক ছিগ্‌মাৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(g) Sketch the level surface of $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ফলনটোৰ পৃষ্ঠস্তৰ অংকন কৰা।

(h) If $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, show that

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

যদি $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

4. Answer **any two** of the following questions :
10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : 5

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$$

(ii) If the function

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

is continuous everywhere, then find the values of the constants a and b . 5

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হলে a আৰু b -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Obtain the reduction formula for

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx. \text{ Using it evaluate—}$$

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

$$6+2+2=10$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ -ৰ হ্ৰাসমান সূত্র উলিওৱা। ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কৰি মান উলিওৱা :

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

(c) State and prove Lagrange's Mean value theorem. What is its geometrical interpretation? Verify mean value theorem for function

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \text{ in } \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

$$1+4+2+3=10$$

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

ইয়াৰ ভৌতিক অৰ্থ কি? $f(x) = x(x-1)(x-2)$

ফলনটোৰ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ অন্তৰালত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা
পৰীক্ষা কৰা।

- (d) (i) Prove that if a function f is differentiable at x_0 , then f is continuous at x_0 . Is converse of the theorem true? $3+1=4$

প্ৰমাণ কৰা যে ফলন f , x_0 বিন্দুত অৱফলনীয়
হলে f ফলনটো x_0 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।
উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত উক্তিটো সঁচা নে?

- (ii) For $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, show that

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is odd} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

6

$y = \cos(m \sin^{-1} x)$ -ৰ কাৰণে দেখুওৱা যে,

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{যদি } n \text{ অযুগ্ম হয়} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{যদি } n \text{ যুগ্ম হয়।} \end{cases}$$

- (e) (i) Let $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$.
Find $f(e, 0)$ and sketch the natural domain of f . $1+4=5$

ধৰা হ'ল $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$ ।
 $f(e, 0)$ মান নিৰ্ণয় কৰা আৰু f ফলনটোৰ
স্বাভাবিক আদিক্ষেত্ৰ অংকন কৰা।

- (ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

show that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$ 5

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

দেখুওৱা যে $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$