

2024

MATHEMATICS

Paper : MAT-MJ-01-B-01-04

MAT-MN-01-B-01-04

Classical Algebra

Full Marks : 60

Time : 2½ hrs

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer *either* in English *or* in Assamese.

1. Answer the following questions: 1×8=8

তলত দিয়া প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

a) Express the complex number i in polar form

জটিল সংখ্যা i মেৰু (polar) আকাৰত প্রকাশ কৰা।

b) $(\cos \theta + i \sin \theta)^{-5}$ is equal to

$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-5}$ ৰ সমান হ'ল-

i) $\cos 5\theta + i \sin 5\theta$

ii) $\cos 5\theta - i \sin 5\theta$

iii) $-\cos 5\theta + i \sin 5\theta$

iv) $-\cos 5\theta - i \sin 5\theta$

(Choose the correct option)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

c) If A is $r \times s$ matrix where $r > s$, what is the maximum rank of A ?

যদি A এটা $r \times s$ আকৃতিৰ মৌলকম্ভ হয়, তেতিয়া A ৰ উচ্চতম কোটি কিমান হ'ব পাৰে য'ত $r > s$?

Contd.

d) Give an example of a skew-symmetric matrix.

বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

e) Find the inverse of the following matrix

তলৰ মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

f) Fill in the blank (শূন্যস্থান পূৰণ কৰা)

$$A (\text{adj } A) = \underline{\hspace{2cm}} = (\text{adj } A) \cdot A$$

where A is a square matrix.

য'ত A এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ।

g) If the equation $x^3 - 4x^2 + 4x - 16 = 0$ has two roots $2i$ and $-2i$ then the other root is

$x^3 - 4x^2 + 4x - 16 = 0$ সমীকৰণৰ দুটা মূল $2i$ আৰু $-2i$ হ'লে, বাকী মূলটো হ'ব :

i) $1+i$

ii) -4

iii) 4

iv) None of the above

(Choose the correct option) (শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

h) Is it true that 'every homogenous system of linear equation has at least one solution' ?

'প্ৰতিটো সমমাত্ৰিক বৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীৰ কমেও এটা সমাধান থাকে।' উক্তিটো সত্যনে?

2. Answer **any six** of the following questions : $2 \times 6 = 12$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

a) Find $\text{mod } z$ and $\arg z$ of $z = -1 + i$

$z = -1 + i$ ৰ $\text{mod } z$ আৰু $\arg z$ নিৰ্ণয় কৰা।

b) Find the fourth roots of unity 1

1-ৰ চতুৰ্থ মূল উলিওৱা।

c) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$$

d) If $z = x + iy$, then prove that

$z = x + iy$ হ'লে, প্রমাণ কৰা যে

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

e) Find $\text{Log } z$ and $\log z$ where $z = -1$

$z = -1$ হ'লে, $\text{Log } z$ আৰু $\log z$ নির্ণয় কৰা

f) 'All the diagonal elements of a skew-symmetric matrix are zero' - is it possible? Justify your answer.

‘অসমমিত মৌলকক্ষৰ সকলোবোৰ কৰ্ণ মৌল শূন্য’ - এইটো সম্ভৱ নে? উত্তৰটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

g) If A and B are two symmetric matrices of same order, show that $AB - BA$ is a skew-symmetric matrix.

যদি A আৰু B দুটা প্ৰতিসম মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $AB - BA$ এটা অপ্ৰতিসম মৌলকক্ষ।

h) Find the rank of the following matrix

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ কোটি নির্ণয় কৰা।

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

i) If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the roots of the equation

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \text{ find the value of}$$

$$\sum \alpha^2$$

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \text{ সমীকৰণৰ মূলকেইটা}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হ'লে $\sum \alpha^2$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

j) If the sum of two roots of the equation

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \text{ is } 0, \text{ then prove that } a_1a_2 = a_3$$

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \text{ সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ যদি যোগফল শূন্য}$$

হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a_1a_2 = a_3$

3. Answer **any four** of the following questions : $5 \times 4 = 20$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

a) Expand $\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ in a series of cosines of multiples of θ

$\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ ক θ ৰ বহুগুণৰ cosine ৰ শ্ৰেণীত প্ৰসাৰণ কৰা।

b) Find all the complex number z such that

$$\exp(2z+1) = i$$

$\exp(2z+1) = i$ হ'লে সকলোবোৰ জটিল সংখ্যা z নিৰ্ণয় কৰা।

c) Express $\log(x+iy)$, $(x,y) \neq (0,0)$ in the form $A+iB$

where $A, B \in R$

$\log(x+iy)$, $(x,y) \neq (0,0)$ ক $A+iB$ প্ৰকাৰত প্ৰকাশ কৰা য'ত

$A, B \in R$ ।

d) For any two non singular matrices A and B , prove the following - $1+2+2=5$

যিকোনো দুটা অক্ষীয়মান মৌলিক A আৰু B ক্ষেত্ৰত তলত দিয়াবোৰ প্ৰমাণ কৰা।

$$\text{i) } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{ii) } AB \text{ is non singular and } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$AB \text{ অক্ষীয়মান আৰু } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\text{iii) } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

e) What is row reduced echelon form of a given matrix.

Reduce the matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ to row echelon

form.

এটা মৌলকৰূপ row reduced echelon ৰূপ কি?

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ মৌলটোক row echelon আৰ্হিলৈ নিয়া।

f) If α , β and γ be the roots of the cubic equation ,

$$x^3 + qx - r = 0 , \text{ then evaluate } \sum (\beta + \gamma - \alpha)^3$$

α , β আৰু γ , ত্ৰিঘাট সমীকৰণ $x^3 + qx - r = 0$ ৰ মূল হ'লে

$\sum (\beta + \gamma - \alpha)^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

g) Solve the equation $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$ if the roots are in A.P.

মূলবোৰ সমান্তৰাল প্ৰগতিত থাকিলে $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

h) If an equation with real coefficients has a complex root $\alpha + iB$, then show that it has also the conjugate complex root $\alpha - iB$.

যদি বাস্তৱ সহযুক্ত কোনো সমীকৰণৰ জটিল মূল $\alpha + iB$ থাকে, তেন্তে দেখুওৱা যে ইয়াৰ জটিল যুগ্মমূল $\alpha - iB$

4. Answer **any two** of the following questions $10 \times 2 = 20$

তলৰ প্রশ্নসমূহৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

a) i) State and prove De Moivre's theorem. $2+5=7$

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্রমাণ কৰা।

ii) Find all values of $(-1)^{\frac{1}{4}}$ 2

$(-1)^{\frac{1}{4}}$ ৰ সকলোবোৰ মান নির্ণয় কৰা।

b) Prove that, if x and y are real numbers then

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

যদি x আৰু y বাস্তৱ সংখ্যা হয়, প্রমাণ কৰা যে,

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

c) Find the general solution of the following system of equations :

তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱাঃ

$$2x + y + z = 0$$

$$4x + 2y + z = 0$$

$$6x + 3y + z = 0$$

$$8x + 4y + z = 0$$

d) i) Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা - $x^3 - 30x + 133 = 0$

ii) If α, β, γ are the roots of the equation

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$, form an equation whose roots

are $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ 4

α, β, γ সমীকৰণ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ৰ মূল হ'লে,

$\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- e) i) Solve the equation $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ if two of the roots are equal in magnitude but opposite in signs. 4

$2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ সমীকৰণ ৰ দুটা মূল সমান মানৰ কিন্তু বিপৰীত চিহ্ন যুক্ত হ'লে সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

- ii) Find the roots of the equation 6

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ whose two roots

α, β are connected by the relation $2\alpha + \beta = 3$

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল সমূহ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ দুটা মূল α, β ই $2\alpha + \beta = 3$ সম্বন্ধটো মানে।
